

# **FUVEST 2002**

---

**10/01/2002**  
**Matemática**

**Q.01**

Carlos, Luís e Sílvio tinham, juntos, 100 mil reais para investir por um ano. Carlos escolheu uma aplicação que rendia 15% ao ano. Luís, uma que rendia 20% ao ano. Sílvio aplicou metade de seu dinheiro em um fundo que rendia 20% ao ano, investindo a outra metade numa aplicação de risco, com rendimento anual pós-fixado. Depois de um ano, Carlos e Luís tinham juntos 59 mil reais; Carlos e Sílvio, 93 mil reais; Luís e Sílvio, 106 mil reais.

- a) Quantos reais cada um tinha inicialmente?
- b) Qual o rendimento da aplicação de risco?

---

**Q.02**

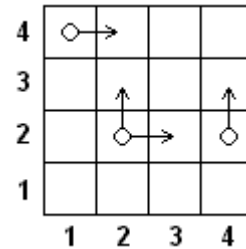
Maria quer cobrir o piso de sua sala com lajotas quadradas, todas com lado de mesma medida inteira, em centímetros. A sala é retangular, de lados 2m e 5m. Os lados das lajotas devem ser paralelos aos lados da sala, devendo ser utilizadas somente lajotas inteiras. Quais são os possíveis valores do lado das lajotas?

**Q.03**

Um tabuleiro tem 4 linhas e 4 colunas. O objetivo de um jogo é levar uma peça da casa inferior esquerda (casa (1, 1)) para a casa superior direita (casa (4, 4)), sendo que esta peça deve mover-se, de cada vez, para a casa imediatamente acima ou imediatamente à direita. Se apenas uma destas casas existir, a peça irá mover-se necessariamente para ela. Por exemplo, dois caminhos possíveis para completar o trajeto são  $(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (4, 4)$  e  $(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (4, 4)$ .

a) Por quantos caminhos distintos pode-se completar esse trajeto?

b) Suponha que o caminho a ser percorrido seja escolhido da seguinte forma: sempre que houver duas opções de movimento, lança-se uma moeda não viciada; se der cara, a peça move-se para a casa à direita e se der coroa, ela se move para a casa acima. Desta forma, cada caminho contado no item a) terá uma certa probabilidade de ser percorrido. Descreva os caminhos que têm maior probabilidade de serem percorridos e calcule essa probabilidade.

**Q.04**

Sejam  $A = (0, 0)$ ,  $B = (8, 0)$  e  $C = (-1, 3)$  os vértices de um triângulo e  $D = (u, v)$  um ponto do segmento  $\overline{BC}$ . Sejam  $E$  o ponto de intersecção de  $\overline{AB}$  com a reta que passa por  $D$  e é paralela ao eixo dos  $y$  e  $F$  o ponto de intersecção de  $\overline{AC}$  com a reta que passa por  $D$  e é paralela ao eixo dos  $x$ .

a) Determine, em função de  $u$ , a área do quadrilátero  $AEDF$ .

b) Determine o valor de  $u$  para o qual a área do quadrilátero  $AEDF$  é máxima.

**Q.05**

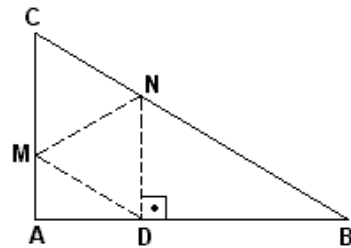
As raízes do polinômio  $p(x) = x^3 - 3x^2 + m$ , onde  $m$  é um número real, estão em progressão aritmética. Determine

- o valor de  $m$ ;
- as raízes desse polinômio.

**Q.06**

O triângulo retângulo  $ABC$ , cujos catetos  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  medem  $1$  e  $\sqrt{3}$ , respectivamente, é dobrado de tal forma que o vértice  $C$  coincida com o ponto  $D$  do lado  $\overline{AB}$ . Seja  $\overline{MN}$  o segmento ao longo do qual ocorreu a dobra. Sabendo que  $\widehat{NDB}$  é reto, determine

- o comprimento dos segmentos  $\overline{CN}$  e  $\overline{CM}$ ;
- a área do triângulo  $CMN$ .



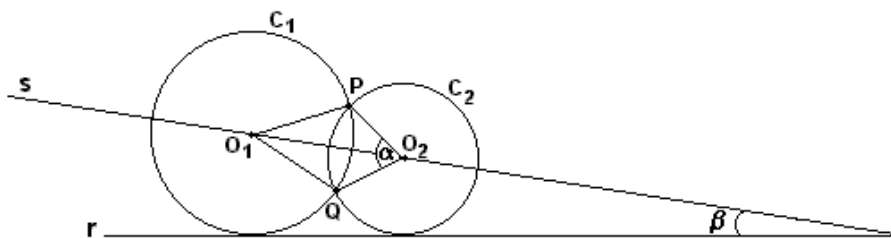
Q.07

Determine as soluções da equação  $(2 \cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$  que estão no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Q.08

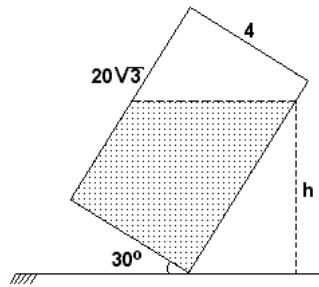
Na figura abaixo, as circunferências  $C_1$  e  $C_2$ , de centros  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente, se interceptam nos pontos P e Q. A reta  $r$  é tangente a  $C_1$  e  $C_2$ ; a reta  $s$  passa por  $O_1$  e  $O_2$  e  $\beta$  é o ângulo agudo entre  $r$  e  $s$ . Sabendo que o raio de  $C_1$  é 4, o de  $C_2$  é 3 e que  $\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{5}$ , calcule:

- a área do quadrilátero  $O_1QO_2P$ ;
- $\operatorname{sen} \alpha$ , onde  $\alpha = \widehat{QO_2P}$ .

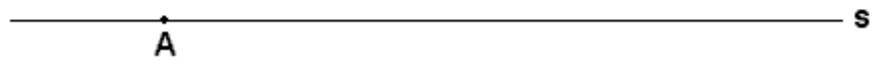


**Q.09**

Um bloco retangular (isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado 4cm e altura  $20\sqrt{3}$ cm, com  $\frac{2}{3}$  de seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas da base, formando um ângulo de  $30^\circ$  com o solo (ver seção lateral abaixo). Determine a altura  $h$  do nível da água em relação ao solo.

**Q.10**

São dados, na página ao lado, os pontos  $A$  e  $M$  e a reta  $s$ . Sabe-se que o ponto  $A$  é vértice de um paralelogramo  $ABCD$ ; o lado  $\overline{AB}$  está na reta  $s$ ;  $M$  é o ponto médio do lado  $\overline{BC}$  e o ângulo  $\widehat{CAB}$  tem medida  $30^\circ$ . Usando régua e compasso, construa esse paralelogramo. Descreva e justifique sua construção.



**ESTE CADERNO CONTÉM 10 (DEZ) QUESTÕES.  
VERIFIQUE SE ESTÁ COMPLETO.  
DURAÇÃO DA PROVA: 3 (TRÊS) HORAS.  
É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE RÉGUA GRADUADA, ESQUADRO E COMPASSO.**

**ATENÇÃO**

VERIFIQUE SE NA PÁGINA DESTINADA À RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES 9 E 10  
ESTÃO PRÉ-IMPRESSOS OS DADOS DA QUESTÃO 10.